

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Air

1. Pengertian Air

Air dapat berwujud padatan (es), cairan (air), dan gas (uap air). Air merupakan satu-satunya zat yang secara alami terdapat di permukaan bumi dalam ketiga wujudnya tersebut. Air bersifat tidak berwarna, tidak berasa, dan tidak berbau dalam kondisi standar.

Pada prinsipnya, jumlah air di alam ini tetap dan mengikuti suatu aliran yang disebut “*Cyclus Hydrologie*”. Laut adalah penampung air terbesar di bumi. Sinar matahari yang dipancarkan ke bumi memanaskan suhu air di permukaan laut, danau, atau yang terikat pada permukaan tanah. Kenaikan suhu memacu air mengalami perubahan dari cair menjadi gas yang disebut proses evaporasi (*evaporation*). Sedangkan air yang terperangkap di permukaan tanaman juga mengalami perubahan wujud menjadi gas yang disebut sebagai proses transpirasi (*transpiration*). Air yang menguap naik ke atmosfer membentuk uap air setelah melalui proses evaporasi dan transpirasi. Selanjutnya uap di atmosfer menjadi dingin dan terkondensasi membentuk awan (*clouds*). Awan terbawa oleh angin mengelilingi bumi, sehingga awan terdistribusi ke seluruh penjuru dunia. Ketika awan sudah tidak mampu lagi menampung air, maka

awan akan menyebabkan titik-titik air yang jatuh ke bumi sebagai hujan. (Indarto, 2010:5).

Air memiliki kemampuan untuk melarutkan banyak zat kimia, seperti garam-garam, asam, beberapa jenis gas, dan banyak molekul organik sehingga air disebut *pelarut universal*. Air berada dalam kesetimbangan dinamis antara fase cair dan padat di bawah tekanan dan temperatur standar. (Hanafiah, A.K., 2012:99).

Berdasarkan peraturan Menteri Kesehatan Nomor 416/MEN.KES/PER/IX/1990 tentang syarat-syarat dan pengawasan kualitas air yang disebut sebagai air minum adalah air yang melalui proses pengolahan yang memenuhi syarat kesehatan dan dapat langsung diminum. Sedangkan air bersih adalah air yang digunakan untuk keperluan sehari-hari yang kualitasnya memenuhi syarat kesehatan dan dapat diminum apabila telah dimasak.

Saat ini, masalah utama yang dihadapi oleh sumber daya air meliputi kuantitas air yang kurang mampu memenuhi kebutuhan yang terus meningkat dan kualitas air untuk keperluan domestik semakin menurun. Kegiatan industri, domestik, dan kegiatan yang lain berdampak negatif terhadap sumber daya air sehingga menyebabkan kualitas air menurun. Kondisi seperti ini menimbulkan gangguan, kerusakan, dan bahaya bagi semua makhluk hidup yang bergantung pada sumber daya air. Oleh karena itu, pengolahan sumber daya air sangat penting agar dimanfaatkan secara

berkelanjutan dengan tingkat mutu yang diinginkan. Salah satu pengelolaannya dengan pemantauan dan interpretasi data kualitas air, mencakup kualitas fisika, kimia, dan biologi.

Salah satu sumber air yang dapat dimanfaatkan adalah air tanah atau air sumur. Air sumur adalah air tanah dangkal sampai kedalaman kurang dari 30 meter, air sumur umumnya pada kedalaman 15 meter dan dinamakan juga sebagai air tanah bebas karena lapisan air tanah tersebut tidak berada di dalam tekanan. Air tanah ini bisa dimanfaatkan sebagai air minum melalui sumur-sumur dangkal, dari segi kualitas agak baik sedangkan kuantitasnya kurang cukup dan tergantung pada musim.

Sumur gali (sumur dangkal) adalah satu konstruksi sumur paling umum dan meluas dipergunakan untuk mengambil air tanah bagi masyarakat kecil dan rumah-rumah perorangan sebagai air minum dengan kedalaman 7-10 meter dari permukaan tanah. Sumur gali menyediakan air yang berasal dari lapisan tanah yang relatif dekat dari permukaan tanah, oleh karena itu dengan mudah terkena kontaminasi melalui rembesan. Umumnya rembesan yang berasal dari tempat pembuangan kotoran manusia dan hewan yakni kakus/jamban, juga dari limbah sumur itu sendiri karena lantainya atau saluran air limbahnya yang tidak kedap air. Keadaan konstruksi dan cara pengambilan air sumur dapat menjadi sumber kontaminasi,

misalnya sumur dengan konstruksi terbuka dan pengambilan air dengan timba.

2. Peranan Air Bagi Kehidupan Manusia

Semua makhluk hidup memerlukan air, karena air merupakan kebutuhan dasar bagi kehidupan. Bagi manusia, air adalah kebutuhan yang sangat mutlak karena zat pembentuk tubuh manusia sebagian besar terdiri dari air berjumlah sekitar 73 % dari bagian tubuh tanpa jaringan lemak.

Kegunaan air bagi tubuh manusia antara lain untuk proses pencernaan, metabolisme, mengangkat zat-zat makanan dalam tubuh, mengatur keseimbangan suhu tubuh dan menjaga tubuh jangan sampai kekeringan (Harini, 2007). Air yang dibutuhkan oleh manusia untuk hidup sehat harus memenuhi syarat kualitas dan secara kuantitas (jumlahnya) juga terpenuhi. Diperkirakan untuk kegiatan rumah tangga yang sederhana paling tidak membutuhkan air sebanyak 100L/orang/hari. Jumlah air untuk keperluan rumah tangga perhari perkapita tidak sama untuk tiap negara. Pada negara maju umumnya dapat dikatakan jumlah pemakaian air per hari per kapita lebih besar dari pada negara berkembang karena faktor-faktor yang mempengaruhi kebutuhan air sangat bervariasi sehingga rata-rata pemakaian air per kapita per hari berbeda.

B. Kualitas Air

Kualitas air adalah karakteristik mutu yang dibutuhkan untuk pemanfaatan tertentu dari sumber-sumber air. Dengan adanya standar kualitas air, orang dapat mengukur kualitas air dari berbagai macam air. Setiap jenis air dapat diukur konsentrasi kandungan unsur yang tercantum didalam standar kualitas sehingga dapat diketahui syarat kualitasnya yang dapat digunakan sebagai tolak ukur. Standar kualitas air bersih dapat berarti sebagai ketentuan-ketentuan berdasarkan Peraturan Menteri Kesehatan RI No.416/MEN/KES/PER/IX/1990 yang dituangkan dalam bentuk angka atau pernyataan yang menunjukkan persyaratan yang harus dipenuhi agar air tersebut tidak menimbulkan gangguan kesehatan, penyakit, gangguan teknis, serta gangguan dalam segi estetika.

Peraturan ini dibuat dengan maksud air minum yang memenuhi syarat kesehatan mempunyai peranan penting dalam rangka pemeliharaan, perlindungan, serta mempertinggi derajat kesehatan masyarakat. Dengan peraturan ini telah memperoleh landasan hukum dan landasan teknis dalam pengawasan kualitas air bersih. Dengan demikian, air yang digunakan sebagai kebutuhan air bersih sehari-hari sebaiknya tidak berwarna, tidak berasa, tidak berbau, jernih, dan mempunyai suhu yang sesuai dengan standar yang ditetapkan sehingga menimbulkan rasa nyaman. Berikut syarat-syarat kualitas air.

a. Syarat Fisik

1) Warna

Warna di dalam air terbagi dua, yakni warna semu dan warna sejati. Warna semu adalah warna yang disebabkan oleh partikel-partikel penyebab kekeruhan (seperti tanah, pasir, dan lain-lain), partikel halus Besi, Mangan, partikel mikroorganisme, warna industri, dan lain-lain. Warna sejati adalah warna yang berasal dari penguraian Zat Organik alami seperti humus, lignin, tanin, dan asam organik lain. Tingkat zat warna air dapat diketahui melalui pemeriksaan laboratorium dengan metode fotometrik. Untuk standar air bersih diharapkan kandungan zat warnanya ≤ 50 TCU.

2) Kekeruhan

Air dikatakan keruh apabila air tersebut banyak mengandung partikel bahan yang tersuspensi sehingga memberikan warna/ rupa yang berlumpur dan kotor. Bahan yang menyebabkan kekeruhan meliputi tanah liat, lumpur, bahan-bahan organik yang tersebar dari partikel-partikel kecil yang tersuspensi. Kekeruhan pada air adalah satu hal yang harus dipertimbangkan karena akan mengurangi dalam segi estetika, menyulitkan dalam usaha penyaringan, dan akan mengurangi efektivitas usaha desinfeksi. Tingkat kekeruhan air dapat diketahui melalui pemeriksaan laboratorium dengan metode Turbidimeter. Untuk standar air bersih Kekeruhan yang diperbolehkan maksimum 25 NTU.

3) *Total Dissolved Solid* (TDS)

Muatan padatan terlarut adalah seluruh kandungan partikel baik berupa bahan organik maupun anorganik yang terlarut dalam air. Bahan-bahan tersuspensi dan terlarut pada perairan alami tidak bersifat toksik, akan tetapi jika berlebihan akan meningkatkan kekeruhan selanjutnya akan menghambat penetrasi cahaya matahari ke kolom air yang berpengaruh terhadap proses fotosintesis di perairan.

b. Syarat Kimia

1) pH

pH menyatakan intensitas keasaman atau alkalinitas dari suatu cairan encer, dan mewakili konsentrasi hidrogen ionnya. Air minum sebaiknya netral, tidak asam atau basa untuk mencegah terjadinya pelarutan logam berat dan korosi jaringan distribusi air minum. pH standar untuk air bersih sebesar 6,5 – 9. Air adalah bahan pelarut yang baik sekali, jika dibantu dengan pH tidak netral dapat melarutkan berbagai elemen kimia yang dilaluinya.

2) Klorida (Cl)

Kadar Klorida umumnya meningkat seiring dengan meningkatnya kadar mineral. Kadar Klorida yang tinggi yang diikuti oleh kadar kalsium dan magnesium yang juga tinggi, dapat meningkatkan sifat *korosivitas* air. Hal ini mengakibatkan terjadinya perkaratan peralatan logam.

3) Kesadahan (Calsium Karbonat (CaCO_3))

Kandungan ion Mg dan Ca dalam air akan menyebabkan air bersifat sadah. Kesadahan air yang tinggi dapat merugikan karena dapat merusak peralatan yang terbuat dari Besi melalui proses pengkaratan (korosi), juga dapat menimbulkan endapan atau kerak pada peralatan. Masalah yang timbul adalah sulitnya sabun membusa sehingga masyarakat tidak suka memanfaatkan penyediaan air bersih tersebut.

4) Sulfat (SO_4)

Sulfat adalah senyawa yang stabil secara kimia karena merupakan bentuk oksida paling tinggi dari unsur belerang. Sulfat dapat dihasilkan dari oksida senyawa sulfida oleh bakteri golongan heterotrofik anaerob menjadi asam sulfida.

Sulfat di dalam lingkungan (air) dapat berada secara ilmiah dan atau dari aktivitas manusia misalnya dari limbah industri dan limbah laboratorium. Selain itu juga berasal dari oksidasi senyawa organik yang mengandung Sulfat, antara lain industri kertas, tekstil, dan industri logam.

5) Fluorida

Sumber Fluorida di alam adalah fluospar (CaF_2), cryolite (Na_3AlF_6), dan fluorapatite. Keberadaan Fluorida juga dapat berasal dari pembakaran batu bara. Dalam jumlah yang kecil Fluorida dapat mencegah kerusakan gigi, akan tetapi konsentrasi yang melebihi

kisaran 1,7 mg/liter dapat mengakibatkan pewarnaan pada enamel gigi yang disebut dengan istilah *mottling*. Kadar yang berlebihan juga dapat berimplikasi terhadap kerusakan pada tulang.

6) Nitrit dan Nitrat

Nitrit merupakan turunan dari amonia. Dari amonia ini, oleh bakteri *Nitrosomonas sp*, diubah menjadi Nitrit. Nitrit biasanya tidak bertahan lama dan merupakan keadaan sementara proses oksidasi antara amonia dan Nitrat. Keadaan Nitrit menggambarkan berlangsungnya proses biologis perombakan bahan organik dengan kadar oksigen terlarut sangat rendah. Kadar Nitrit pada perairan relatif kecil karena segera dioksidasi menjadi Nitrat.

7) Besi (Fe) dan Mangan (Mn)

Kandungan Besi dan Mangan dalam air berasal dari tanah yang memang banyak mengandung banyak mineral dan logam yang larut dalam air tanah. Besi larut dalam air dalam bentuk fero-oksida. Kedua jenis logam ini, pada konsentrasi tinggi menyebabkan bercak noda kuning kecoklatan untuk Besi atau kehitaman untuk Mangan sehingga meninggalkan endapan coklat dan hitam pada bak mandi, atau alat-alat rumah tangga. Air yang mengandung Besi atau Mangan juga menyebabkan pakaian menjadi kusam setelah dicuci.

8) Sianida

Kehadiran unsur Sianida (Sn) dalam air bersih menyebabkan timbulnya rasa dan bau logam, menimbulkan warna koloid merah

(karat) dalam air akibat oksidasi oleh oksigen yang terlarut dan dapat bersifat racun bagi manusia.

9) Timbal

Timbal merupakan logam berat yang sangat beracun, dapat dideteksi secara praktis pada seluruh benda mati di lingkungan dan seluruh sistem biologis. Komponen ini beracun terhadap seluruh aspek kehidupan. Rekomendasi dari WHO, logam berat Pb dapat ditoleransi dalam seminggu dengan takaran 50 mg/kg berat badan untuk dewasa dan 25 mg/kg berat badan untuk bayi dan anak-anak. Mobilitas Timbal di tanah dan tumbuhan cenderung lambat dengan kadar normalnya pada tumbuhan berkisar 0,5 – 3 ppm.

10) Zat Organik (KMnO_4)

Kandungan bahan organik dalam air secara berlebihan dapat terurai menjadi zat-zat yang berbahaya bagi kesehatan.

c. Mikrobiologis

Di bidang mikrobiologi air, kehadiran mikroorganisme tertentu khususnya bakteri dan mikroalga dapat digunakan sebagai mikroorganisme parameter atau indikator alami terhadap kehadiran pencemar organik.

Misalnya kehadiran materi fekal (dari tinja) di dalam badan air dapat diketahui dengan adanya kelompok bakteri Coli. Penentuan kualitas air secara mikrobiologi, untuk mengetahui adanya bakteri

tersebut dapat ditentukan berdasarkan uji tertentu dengan perhitungan tabel JPT (Jumlah Perkiraan terdekat).

Adanya materi fekal di dalam air yang dipergunakan sebagai air minum sangat tidak diharapkan, baik dari segi estetika, sanitasi, maupun dengan alasan infeksi. Jika didalam 100 ml sampel air didapatkan 500 sel bakteri Coli, memungkinkan terjadinya infeksi gastroenteritis yang segera diikuti oleh demam tifoid. *Escherichia coli* adalah salah satu contoh jenis Coli, pada keadaan tertentu dapat mengalahkan mekanisme pertahanan tubuh sehingga dapat menyebabkan infeksi pada kandung kemih, pelviks, ginjal, dan hati. Juga mengakibatkan diare, peritonitis, meningitis, dan lain-lain.

Dari jumlah feses yang dihasilkan setiap hari oleh manusia (100-150 gram) didalamnya terkandung sekitar 3×10^{11} (300 milyar) sel bakteri Coli. Oleh karena itu, adanya bakteri Coli di dalam badan air diparalelkan dengan adanya kontaminasi materi fekal. Sehingga lebih tinggi kandungan bakteri Coli maka air lebih kotor dan tidak memenuhi syarat air yang dapat digunakan untuk kepentingan manusia khususnya untuk air minum yang tidak membahayakan kesehatan.

C. Himpunan *Fuzzy*

1. Himpunan Tegas

Himpunan merupakan kumpulan objek-objek (benda real atau abstrak) atau hal-hal lain yang telah didefinisikan dengan jelas.

Himpunan tegas dapat didefinisikan dengan mendaftar atau mendata semua anggota-anggotanya (*the list method*) atau dengan merinci syarat-syarat yang harus dipenuhi oleh anggota himpunannya (*the rule method*). *The list method* dapat digunakan hanya untuk himpunan berhingga. Sedangkan untuk *the rule method* bersifat lebih umum. Untuk *the rule method*, sebuah himpunan A dipresentasikan sebagai berikut.

$$A = \{x \in U, x \text{ dengan beberapa syarat tertentu}\}$$

Selain itu, ada *the membership method* yang mendefinisikan himpunan A yakni metode yang memperkenalkan fungsi keanggotaan 0 dan 1 (atau yang biasa disebut dengan fungsi karakteristik) untuk A , dinotasikan dengan $\mu_A(x)$, sebagai berikut (Chen & Pham, 2001:5)

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Objek yang ada dalam himpunan disebut elemen atau anggota himpunan. Pada umumnya, himpunan disimbulkan dengan huruf kapital, sedangkan elemen atau anggota disimbolkan dengan alfabet kecil. Notasi " $a \in A$ " dibaca a anggota himpunan A dan notasi $a \notin A$ dibaca a bukan anggota himpunan A . (Sukirman, 2006:116).

2. Himpunan Universal

Himpunan *universal* atau yang biasa disebut dengan himpunan semesta merupakan himpunan yang memiliki semua elemen di dalam semesta pembicaraan. Biasanya himpunan *universal* dilambangkan dengan (U) (Rasyad:8). Pada penelitian mengenai kualitas air ini

terdapat 17 himpunan *universal*, yaitu: Warna (U_1), Kekeruhan (U_2), TDS (U_3), pH (U_4), Cl (U_5), CaCO_3 (U_6), KMnO_4 (U_7), SO_4 (U_8), F (U_9), Nitrit (U_{10}), Nitrat (U_{11}), Fe (U_{12}), Mn (U_{13}), Sn (U_{14}), Pb (U_{15}), Coliform (U_{16}), Coli Tinja (U_{17}), dan kualitas air (V).

3. Himpunan *Fuzzy*

Teori himpunan *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi Asker Zadeh, seorang ilmuwan Amerika Serikat berkebangsaan Iran dari Universitas California di Barkeley pada tahun 1965 yang merupakan pengembangan dari himpunan tegas (Klir & Bo, 1997)

Definisi 2.1. (Rojas, 1997)

Himpunan *fuzzy* A dalam himpunan *universal* U dipresentasikan dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ yang mengambil nilai di interval $[0,1]$.

Definisi tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$\mu_A(x) \rightarrow [0, 1]$; $\mu_A(x)$ menyatakan nilai derajat keanggotaan x di A

Apabila suatu elemen x dalam suatu himpunan A memiliki derajat keanggotaan *fuzzy* $\mu_A(x) = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan A .

Himpunan *fuzzy* memiliki 2 atribut, yaitu (Kusumadewi, 2003:158):

- a. Linguistik, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami,

seperti: Cemar Berat, Cemar Sedang, Cemar Ringan, Kondisi Baik, dan sebagainya.

- b. Numeris, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel, seperti: -40, -31, -30, -11, dan sebagainya.

4. Fungsi Keanggotaan (*Membership Function*)

Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik input dan ke dalam nilai keanggotaannya (derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1 (Kusumadewi, 2003:160).

Contoh 2.1:

Misalkan himpunan tegas untuk variabel kualitas air dibagi menjadi 4 kategori sesuai dengan Keputusan Menteri Lingkungan Hidup Nomor: 115 Tahun 2003, yaitu:

$0,0 \leq P_{ij} \leq 1,0$	Memenuhi Baku Mutu (Kondisi Baik)
$1,0 < P_{ij} \leq 5,0$	Cemar Ringan
$5,0 < P_{ij} \leq 10,0$	Cemar Sedang
$P_{ij} > 10,0$	Cemar Berat

Fungsi Keanggotaan Baku Mutu (BM):

$$\mu[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 \leq P_{ij} \leq 1 \\ 0, & \text{untuk } P_{ij} \text{ yang lain} \end{cases}$$

Fungsi Keanggotaan Cemar Ringan (CR):

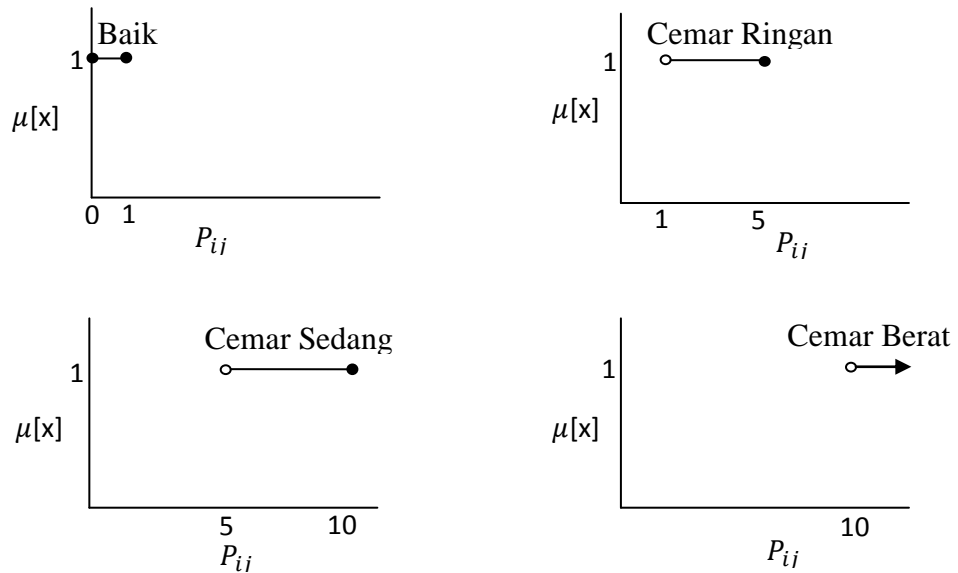
$$\mu[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1 < P_{ij} \leq 5 \\ 0, & \text{untuk } P_{ij} \text{ yang lain} \end{cases}$$

Fungsi Keanggotaan Cemar Sedang (CS):

$$\mu[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 5 < P_{ij} \leq 10 \\ 0, & \text{untuk } P_{ij} \text{ yang lain} \end{cases}$$

Fungsi Keanggotaan Cemar Berat (CB):

$$\mu[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } P_{ij} \geq 10 \\ 0, & \text{untuk } P_{ij} < 10 \end{cases}$$



Gambar 2.1 Himpunan: memenuhi Baku Mutu, Cemar Ringan, Cemar Sedang, Cemar Berat.

Contoh 2.2:

Misalkan himpunan *fuzzy* untuk variabel status mutu air dengan himpunan *universal* $U = [0, 20]$ terbagi menjadi 4 himpunan *fuzzy*, yaitu: Cemar Berat, Cemar Sedang, Cemar Ringan, dan Baku Mutu.

Pada contoh 2.2 ini akan dibuat himpunan *fuzzy* dari himpunan tegas pada contoh 2.1. himpunan *fuzzy* ini dapat ditentukan sendiri berdasarkan keinginan dan kebutuhan masing-masing. Untuk penelitian ini himpunan *fuzzy* pada kualitas air ditentukan dengan

merujuk pada kriteria status mutu air yang telah ditetapkan dalam Keputusan Menteri Lingkungan Hidup No. 115 Tahun 2003. Berdasarkan KepMen tersebut nilai kualitas air telah ditetapkan dalam interval-interval tertentu. Pada interval-interval tersebut nilai derajat keanggotaan masing-masing himpunan *fuzzy* dari kualitas air dianggap bernilai 1, sehingga diperoleh kriteria kualitas air adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1 Kriteria Kualitas Air

$P_{ij}(x)$	Kualitas Air
$0 \leq x \leq 1$	Kondisi Baik
$1 < x \leq 5$	Cemar Ringan
$5 < x \leq 10$	Cemar Sedang
$x > 10$	Cemar Berat

Gambar 2.2 di bawah ini menunjukkan grafik dari himpunan *fuzzy* untuk variabel kualitas air sumur dengan himpunan *universal* $V = [0,20]$.

(i) Kondisi Baik

$$\mu_{\text{Kondisi Baik}}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1.1 - x}{0.1}, & \text{untuk } 1 \leq x \leq 1.1 \\ 0, & \text{untuk } x \geq 1.1 \end{cases}$$

(ii) Cemar Ringan

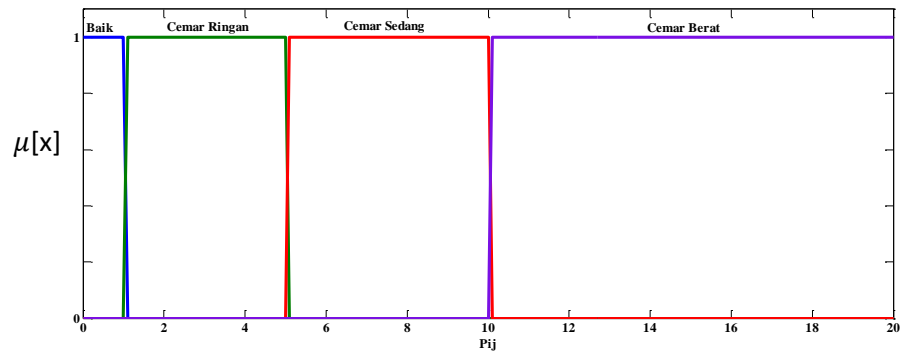
$$\mu_{\text{Cemar Ringan}}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 1.1 \leq x \leq 5 \\ \frac{x - 1}{0.1}, & \text{untuk } 1 \leq x \leq 1.1 \\ \frac{5.1 - x}{0.1}, & \text{untuk } 5 \leq x \leq 5.1 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 1 \text{ atau } x \geq 5.1 \end{cases}$$

(iii) Cemar Sedang

$$\mu_{Cemar\ Sedang}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 5.1 \leq x \leq 10 \\ \frac{x - 5}{0.1}, & \text{untuk } 5 \leq x \leq 5.1 \\ \frac{10.1 - x}{0.1}, & \text{untuk } 10 \leq x \leq 10.1 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 5 \text{ atau } x \geq 10.1 \end{cases}$$

(iv) Cemar Berat

$$\mu_{Cemar\ Berat}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \geq 10.1 \\ \frac{x - 10}{0.1}, & \text{untuk } 10 \leq x \leq 10.1 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 10 \end{cases}$$



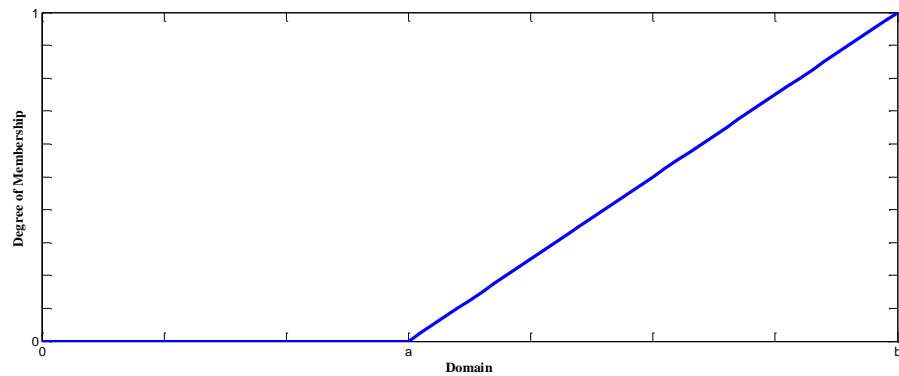
Gambar 2.2 Himpunan *fuzzy* untuk variabel kualitas air sumur

Berdasarkan kedua contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa setiap himpunan tegas adalah himpunan *fuzzy*, tetapi setiap himpunan *fuzzy* belum tentu merupakan himpunan tegas.

Terdapat beberapa jenis fungsi yang bisa digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan dalam fungsi keanggotaan (*membership function*). Beberapa jenis fungsi tersebut adalah (Kusumadewi, 2003:160):

a. Representasi Linear

Representasi linear merupakan pemetaan input ke derajat keanggotaan yang digambarkan sebagai suatu garis lurus. Terdapat 2 jenis himpunan *fuzzy* yang linear yaitu representasi linear naik dan representasi linear turun.



Gambar 2.3 Representasi Linear Naik (Kusumadewi, 2003:160).

Jenis yang pertama yaitu representasi linear naik. Kenaikan himpunan dimulai pada nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan nol [0] bergerak ke arah kanan menuju ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan yang lebih tinggi (Kusumadewi, 2003:160).

Fungsi keanggotaan untuk kurva representasi linear naik adalah sebagai berikut:

$$\mu [x] = \begin{cases} 0 ; x < a \\ \frac{x - a}{b - a} ; a \leq x \leq b \\ 1 ; x > b \end{cases}$$

Contoh 2.3:

Misalkan air sumur 1 pada kota Yogyakarta di provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta memiliki kandungan Sulfat dengan fungsi keanggotaan untuk himpunan “Tinggi” pada himpunan *universal* $U = [0, 500]$ sebagai berikut:

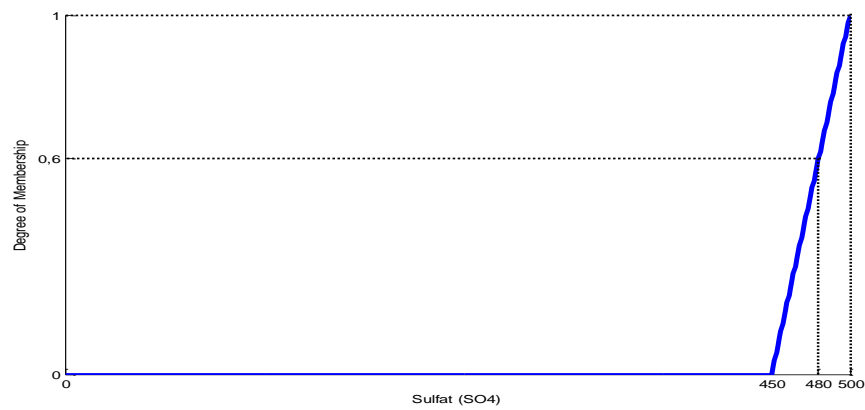
Pada penelitian ini pendekatan fungsi yang digunakan adalah pendekatan fungsi kurva segitiga untuk parameter-parameter *inputnya* dan pendekatan fungsi kurva trapesium untuk *outputnya*.

Misalkan pada parameter Sulfat telah diketahui himpunan *universalnya* adalah $[0,500]$ dan memiliki 3 himpunan *fuzzy*, yaitu: rendah, sedang, dan tinggi. Masing-masing dari himpunan *fuzzy* tersebut memiliki pendekatan fungsi keanggotaan, yaitu: pendekatan fungsi kurva trapesium (himpunan *fuzzy* rendah), representasi kurva segitiga (himpunan *fuzzy* sedang), dan representasi kurva linear naik (himpunan *fuzzy* tinggi). Pada permasalahan di atas akan ditentukan fungsi keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* tinggi, sehingga pendekatan fungsi yang digunakan adalah representasi linear naik. Sebelumnya telah dijelaskan mengenai fungsi keanggotaan untuk representasi linear naik. Terdapat variabel a dan b dalam fungsi keanggotaan tersebut, dimana variabel tersebut dapat ditentukan sendiri sesuai dengan keinginan dan kebutuhan peneliti. Untuk permasalahan ini peneliti menentukan nilai untuk variabel a adalah 450 dan b adalah 500 (batas atas untuk himpunan *universalnya*). Sehingga diperoleh

fungsi keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* tinggi pada parameter Sulfat adalah sebagai berikut:

$$tinggi(x) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 450 \\ \frac{x - 450}{50}, & \text{untuk } 450 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada gambar 2.4 sebagai berikut:



Gambar 2.4 Himpunan *fuzzy* “Tinggi”

Berdasarkan pada fungsi keanggotaan seperti di atas maka dapat diperoleh nilai derajat keanggotaan untuk kandungan nilai Sulfat warna sebesar 480 mg/L sebagai berikut.

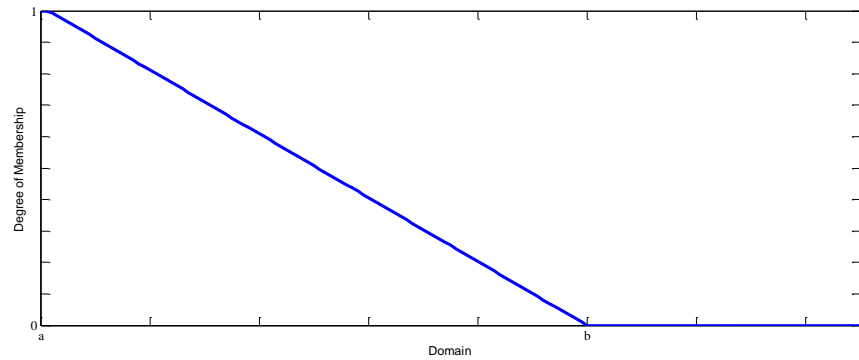
$$\mu_{Tinggi}[480] = \frac{480 - 450}{500 - 450} = \frac{30}{50} = 0,6$$

Jenis yang kedua adalah representasi linear turun yang merupakan kebalikan dari representasi linear naik. Garis lurus dimulai dari nilai domain dengan derajat keanggotaan tertinggi pada sisi kiri, kemudian bergerak menurun ke nilai domain yang memiliki derajat keanggotaan lebih rendah (Kusumadewi, 2003:161).

Fungsi keanggotaan untuk kurva representasi linear turun adalah sebagai berikut:

$$\mu[x] = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 0; & x > b \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.5 sebagai berikut:



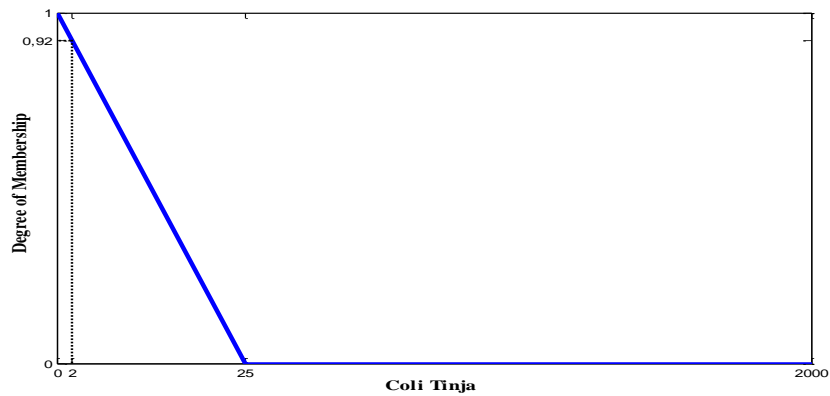
Gambar 2.5 Representasi Linear Turun (Kusumadewi, 2003:161).

Contoh 2.4:

Misalkan air sumur 1 pada lokasi kota Yogyakarta di provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta (DIY) memiliki kandungan Coli Tinja dengan fungsi keanggotaan untuk himpunan “Rendah” pada himpunan *universal* $U = [0, 2000]$ sebagai berikut.

$$\mu_{Rendah}[x] = \begin{cases} \frac{25-x}{25} & , \text{untuk } 0 \leq x \leq 25 \\ 0 & , \text{untuk } x \geq 25 \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.6 sebagai berikut:



Gambar 2.6 Himpunan *fuzzy* “Rendah”.

Berdasarkan pada fungsi keanggotaan seperti di atas maka dapat diperoleh nilai derajat keanggotaan untuk kandungan nilai Coli Tinja sebesar 2 MPN/100ml sebagai berikut.

$$\mu_{Rendah}[2] = \frac{25 - 2}{25} = \frac{23}{25} = 0,92$$

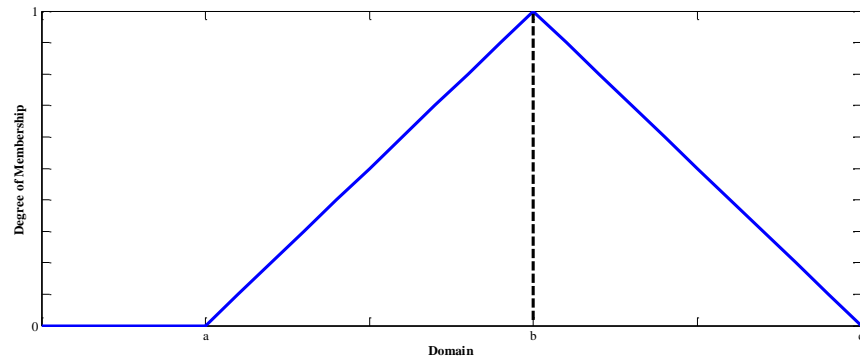
b. Representasi Kurva Segitiga

Representasi kurva segitiga adalah pemetaan input data ke derajat keanggotaan yang digambarkan sebagai suatu kurva berbentuk segitiga. Pada dasarnya kurva segitiga merupakan gabungan antara 2 garis linear (Kusumadewi, 2003:162).

Fungsi keanggotaan untuk representasi kurva segitiga adalah sebagai berikut:

$$\mu[x] = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ \frac{c - x}{c - b}, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{untuk } x < a \text{ atau } x > c \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.7 sebagai berikut:



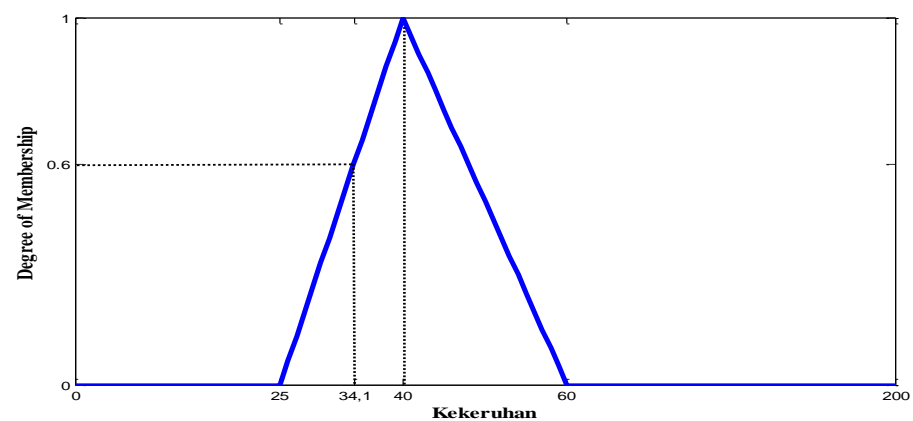
Gambar 2.7 Kurva Segitiga (Kusumadewi, 2003: 162).

Contoh 2.5:

Misalkan pada sumur 7 di lokasi kota Yogyakarta di provinsi DIY memiliki kandungan kekeruhan dengan fungsi keanggotaan untuk himpunan *fuzzy* “Sedang” pada himpunan *universal* $U = [0, 200]$ sebagai berikut.

$$\mu_{Sedang}[x] = \begin{cases} \frac{x - 25}{15} & , \text{untuk } 25 \leq x \leq 40 \\ \frac{60 - x}{20} & , \text{untuk } 40 \leq x \leq 60 \\ 0 & , \text{untuk } x \leq 25 \text{ atau } x \geq 60 \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.8 sebagai berikut:



Gambar 2.8 Himpunan *fuzzy* “Sedang” untuk kurva segitiga.

Berdasarkan pada fungsi keanggotaan tersebut maka dapat diperoleh nilai derajat keanggotaan untuk kandungan nilai kekeruhan sebesar 34.1 skala TCU sebagai berikut.

$$\mu_{Sedang}[x] = \frac{34.1 - 25}{15} = \frac{9,1}{15} = 0,6067 = 0,6$$

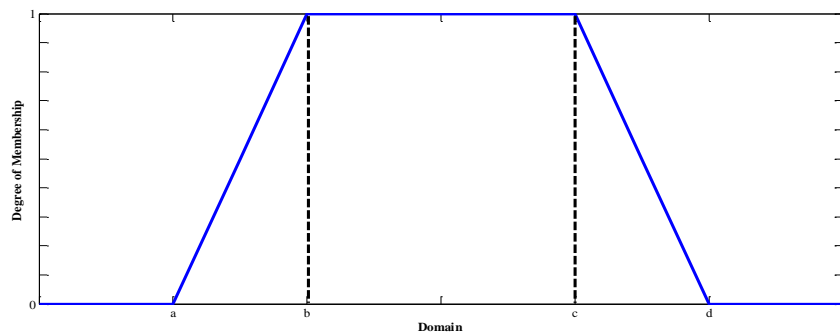
c. Representasi Kurva Trapesium

Representasi kurva trapesium merupakan pemetaan input data ke derajat keanggotaan yang digambarkan sebagai suatu kurva berbentuk trapesium. Kurva trapesium ini pada dasarnya berbentuk segitiga, tetapi terdapat perbedaan pada beberapa titik yang memiliki keanggotaan 1 (Kusumadewi, 2003:163).

Fungsi keanggotaan untuk representasi kurva trapesium adalah sebagai berikut:

$$\mu[x] = \begin{cases} 1; b \leq x \leq c \\ \frac{x-a}{b-a}; a \leq x \leq b \\ \frac{d-x}{d-c}; c \leq x \leq d \\ 0; x < a \text{ atau } x > d \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.9 sebagai berikut:



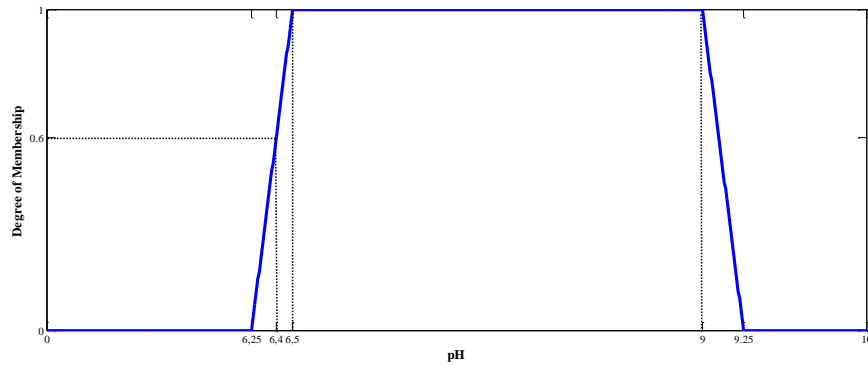
Gambar 2.9 Kurva Trapesium (Kusumadewi, 2003:164).

Contoh 2.6:

Misalkan pada sumur ke-51 di lokasi kota Sleman di provinsi DIY memiliki kandungan pH dengan fungsi keanggotaan untuk himpunan “Normal” pada himpunan *universal* $U = [0\ 10]$ sebagai berikut.

$$\mu_{Sedang}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 6,5 \leq x \leq 9 \\ \frac{x - 6,25}{0,25}, & \text{untuk } 6,25 \leq x \leq 6,5 \\ \frac{9,25 - x}{0,25}, & \text{untuk } 9 \leq x \leq 9,25 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 6,25 \text{ atau } x \geq 9,25 \end{cases}$$

Representasi grafik untuk fungsi keanggotaan di atas dapat ditunjukkan pada Gambar 2.10 sebagai berikut:



Gambar 2.10 Himpunan *fuzzy* “Normal” pada kurva trapesium.

Berdasarkan pada fungsi keanggotaan seperti di atas maka dapat diperoleh nilai derajat keanggotaan untuk pH sebesar 6,4 sebagai berikut.

$$\mu_{Cemar\ Sedang}[6,4] = \frac{6,4 - 6,25}{0,25} = \frac{0,15}{0,25} = 0,6$$

d. Representasi Kurva Bentuk Bahu

Bentuk dari kurva ini merupakan daerah yang terletak di tengah-tengah suatu variabel yang dipresentasikan dalam bentuk segitiga, pada sisi kanan dan kirinya akan naik dan turun (Kusumadewi, 2003: 165).

Contoh 2.7:

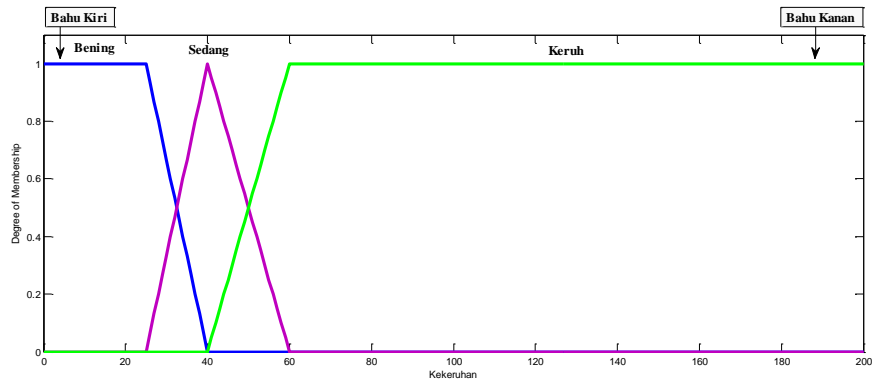
Fungsi keanggotaan kurva bentuk bahu pada variabel kekeruhan dengan himpunan *universal* $U = [0 \ 200]$ yaitu:

$$\mu_{Bening}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \leq 25 \\ \frac{40-x}{15}, & \text{untuk } 25 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{untuk } x \geq 40 \end{cases}$$

$$\mu_{Sedang}[x] = \begin{cases} \frac{x-25}{15}, & \text{untuk } 25 \leq x \leq 40 \\ \frac{60-x}{20}, & \text{untuk } 40 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 25 \text{ atau } x \geq 60 \end{cases}$$

$$\mu_{Keruh}[x] = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \geq 60 \\ \frac{x-40}{20}, & \text{untuk } 40 \leq x \leq 60 \\ 0, & \text{untuk } x \leq 40 \end{cases}$$

Representasi secara grafik untuk fungsi keanggotaan tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.11 sebagai berikut:



Gambar 2.11 Daerah “bahu” pada variabel Kekeruhan

D. Operator Dasar untuk Operasi Himpunan *Fuzzy*

Ada beberapa operasi yang didefinisikan secara khusus untuk mengkombinasikan 2 himpunan *fuzzy* atau lebih. Nilai keanggotaan hasil dari operasi 2 himpunan atau lebih sering dikenal dengan nama *fire strength* atau α -predikat. Ada 3 operator yang digunakan untuk mengkombinasikan himpunan *fuzzy* tersebut, yaitu (Kusumadewi, 2003:175):

a. Operator AND

Operator AND ini diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terkecil antar elemen ada himpunan-himpunan yang bersangkutan (Kusumadewi, 2003:175).

$$\mu_{A \cap B} = \min (\mu_A[x], \mu_B[y])$$

Contoh 2.11:

Nilai keanggotaan untuk 62 skala TCU pada himpunan “Sedang” pada variabel warna adalah 0,8 ($\mu_{Sedang}[62] = 0,8$); dan nilai keanggotaan 5,06 pada himpunan “Cemar Sedang” pada variabel

kualitas air adalah 0,6 ($\mu_{\text{Cemar Sedang}}[5,06] = 0,6$); maka α -predikat untuk warna “Sedang” dan kualitas air “Cemar Sedang” adalah:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Sedang} \cap \text{Cemar Sedang}} &= \min(\mu_{\text{Sedang}}[62], \mu_{\text{Cemar Sedang}}[5,06]) \\ &= \min(0,8; 0,6) = 0,6\end{aligned}$$

b. Operator OR

Operator OR ini diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terbesar antar elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan (Kusumadewi, 2003:176).

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_A[x], \mu_B[y])$$

Contoh 2.12:

Nilai keanggotaan untuk 62 skala TCU pada himpunan “Sedang” pada variabel warna adalah 0,8 ($\mu_{\text{Sedang}}[62] = 0,8$); dan nilai keanggotaan 5,06 pada himpunan “Cemar Sedang” pada variabel kualitas air adalah 0,6 ($\mu_{\text{Cemar Sedang}}[5,06] = 0,6$); maka α -predikat untuk warna “Sedang” dan kualitas air “Cemar Sedang” adalah:

$$\begin{aligned}\mu_{\text{Sedang} \cup \text{Cemar Sedang}} &= \max(\mu_{\text{Sedang}}[62], \mu_{\text{Cemar Sedang}}[5,06]) \\ &= \max(0,8; 0,6) = 0,8\end{aligned}$$

c. Operator NOT

Operator NOT diperoleh dengan mengurangi nilai keanggotaan elemen pada himpunan yang bersangkutan dari 1 (Kusumadewi, 2003:176).

$$\mu_{A'}[x] = 1 - \mu_A[x]$$

Contoh 2.13:

Nilai keanggotaan untuk 62 skala TCU pada himpunan “Sedang” pada variabel Warna adalah 0,8 ($\mu_{Sedang}[62] = 0,8$); maka α -predikat untuk Warna “Tidak Sedang” adalah:

$$\mu_{Sedang'}[62] = 1 - \mu_{Sedang}[62] = 1 - 0,8 = 0,2$$

E. Logika Fuzzy**1. Logika Klasik**

Logika adalah pembelajaran tentang metode dan prinsip-prinsip dari suatu alasan atau sebab, dimana alasan atau sebab tersebut berarti menemukan proposisi baru dari proposisi yang sudah ada. Dalam logika klasik, proposisi dikehendaki untuk bernilai benar atau salah, dimana nilai kebenaran dari sebuah proposisi adalah antara 0 atau 1 (Wang, 1997:73).

2. Logika Fuzzy

Logika *fuzzy* adalah suatu cara yang tepat untuk memetakan suatu ruang *input* kedalam suatu ruang *output*. Titik awal dari konsep mengenai ketidakpastian ini adalah *paper* yang dibuat oleh Lofti A Zadeh (1965), dimana Zadeh memperkenalkan teori yang memiliki objek-objek dari himpunan *fuzzy* yang memiliki batasan yang tidak presisi dan keanggotaan dalam himpunan *fuzzy*, dan bukan dalam bentuk logika benar (*true*) atau salah (*false*), tapi dinyatakan dalam derajat (*degree*). Konsep seperti ini disebut dengan *Fuzziness* dan teorinya dinamakan *Fuzzy Set Theory*. *Fuzziness* dapat didefinisikan sebagai logika *fuzzy*

yang berkenaan dengan suatu kejadian, fenomena atau pernyataan itu sendiri. Logika *fuzzy* ini merepresentasikan pengetahuan manusia ke dalam rumus logika. Contoh dari logika *fuzzy* adalah sebagai berikut:

JIKA Timbal (Pb) tinggi, MAKA kualitas air sumur cemar berat

Ada beberapa alasan logika *fuzzy* lebih sering digunakan untuk pengambilan keputusan, antara lain adalah (Kusumadewi, 2003:154):

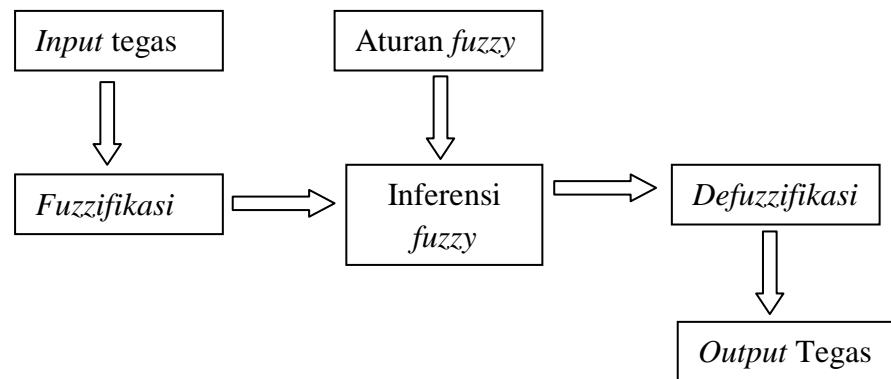
- a. Konsep logika *fuzzy* sederhana dan lebih mudah untuk dimengerti
- b. Logika *fuzzy* sangat *fleksible*
- c. Adanya toleransi terhadap data-data yang tidak tepat
- d. Logika *fuzzy* mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks
- e. Logika *fuzzy* dapat membangun dan mengaplikasikan kemampuan atau pengalaman para pakar secara langsung

F. Klasifikasi *Fuzzy*

1. Definisi Klasifikasi *Fuzzy*

Aplikasi – aplikasi yang menggunakan sistem logika *fuzzy* sering sekali dianggap atau dinamakan sebagai pengendali *fuzzy* (*fuzzy control*). Padahal di samping pengendali *fuzzy* terdapat bermacam-macam teori yang digunakan pada aplikasi – aplikasi *fuzzy* salah satunya adalah klasifikasi *fuzzy* (*fuzzy classification*) (Zebua dan Wahab, 1995). Berdasarkan penjelasan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa klasifikasi *fuzzy* merupakan salah satu aplikasi dari logika *fuzzy* yang bertujuan untuk mengklasifikasikan suatu permasalahan ke dalam

beberapa kelas atau golongan. Alur proses klasifikasi *fuzzy* ditunjukkan pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 Diagram Alur Klasifikasi *Fuzzy* (Wang, 1997:7).

Berikut adalah penjelasan mengenai keempat tahapan membangun sistem *fuzzy*.

a. Fuzzifikasi

Menurut Wang (1997:105), fuzzifikasi didefinisikan sebagai pemetaan dari himpunan tegas ke himpunan *fuzzy*. Kriteria yang harus dipenuhi pada proses fuzzifikasi adalah semua anggota pada himpunan tegas harus termuat dalam himpunan *fuzzy*, tidak terdapat gangguan pada *input* sistem *fuzzy*, dan himpunan *fuzzy* yang digunakan harus bisa mempermudah perhitungan pada sistem *fuzzy*

b. Aturan Fuzzy

Aturan yang yang digunakan pada himpunan *fuzzy* adalah aturan jika-maka. Aturan *fuzzy* JIKA-MAKA merupakan pernyataan yang direpresentasikan dengan

JIKA < proposisi fuzzy > MAKA < proposisi fuzzy >

Proposisi *fuzzy* dibedakan menjadi dua, proposisi *fuzzy atomic* dan proposisi *fuzzy compound*. Proposisi *fuzzy atomic* adalah pernyataan *single* dimana x sebagai variabel linguistik dan A adalah himpunan *fuzzy* dari x . Proposisi *fuzzy compound* adalah gabungan dari proposisi *fuzzy atomic* yang dihubungkan dengan operator “or”, “and” dan “not”. (Wang, 1997:62-63).

Contoh 2.14. x adalah K , dan x adalah M merupakan contoh dari proposisi *fuzzy atomic*. x adalah bukan K , dan x adalah bukan M adalah contoh dari proposisi *fuzzy compound*.

c. **Inferensi Fuzzy**

Inferensi *fuzzy* merupakan tahap evaluasi pada aturan *fuzzy*. Tahap evaluasi dilakukan berdasarkan penalaran dengan menggunakan *input fuzzy* dan aturan *fuzzy* sehingga diperoleh *output* berupa himpunan *fuzzy*. Dari berbagai macam inferensi *fuzzy* yang dikenalakan para peneliti, berikut akan dijelaskan metode Mamdani, Tsukamoto dan Sugeno sebagai inferensi *fuzzy* yang sering digunakan dalam berbagai penelitian. (Sri dan Hari, 2013:31-75).

a. Metode Mamdani

Metode Mamdani pertama kali diperkenalkan oleh Ibrahim Mamdani pada tahun 1975. Metode ini merupakan metode yang paling sederhana dan paling sering digunakan untuk penelitian dibandingkan metode yang lain. *Input* dan *output* pada metode mamdani berupa himpunan *fuzzy*. (Sri, 2002:98). Metode Mamdani

menggunakan fungsi implikasi min dan agregasi max sehingga metode Mamdani juga disebut dengan metode MIN-MAX (*min-max inferencing*).

b. Metode Tsukamoto

Metode Tsukamoto merupakan metode dimana konsekuen dari aturan *fuzzy*-nya direpresentasikan dengan fungsi keanggotaan yang monoton.

c. Metode Sugeno

Sedikit berbeda dengan metode Mamdani, metode Sugeno juga menggunakan himpunan *fuzzy* pada *input*nya. Akan tetapi, *output* yang digunakan pada metode Sugeno adalah konstanta atau persamaan linier. Metode ini pertama kali dikenalkan oleh Takagi-Sugeno Kang pada tahun 1985. (Sri, 2002:98). Jika pada metode Mamdani proses defuzzifikasi menggunakan agregasi daerah di bawah kuva, maka pada metode Sugeno agregasi berupa *singleton-singleton*.

d. **Defuzzifikasi**

Defuzzifikasi merupakan proses yang berkebalikan dengan proses pada fuzzifikasi. Wang (1997:108) mendefinisikan defuzzifikasi sebagai pemetaan dari himpunan *fuzzy* (B) ke himpunan tegas. Himpunan *fuzzy* yang dimaksud disini adalah hasil *output* yang diperoleh dari hasil inferensi.

2. Langkah – Langkah Klasifikasi *Fuzzy*

Berdasarkan pada gambar 2.12 di atas, untuk melakukan proses klasifikasi *fuzzy* ada beberapa langkah yang harus dilakukan, yaitu:

a. Menentukan *Input-Output*

Input merupakan nilai dari parameter – parameter yang harus dimasukkan ke dalam sistem untuk mendapatkan hasil klasifikasi yang diharapkan.

Output merupakan nilai keluaran atau kesimpulan yang dihasilkan dari pengolahan data oleh sistem dari *input-input* yang diberikan.

b. Menentukan Himpunan *Universal*

Himpunan *universal* atau himpunan semesta merupakan himpunan yang memiliki semua elemen di dalam semesta pembicaraan. Biasanya himpunan *universal* dilambangkan dengan (U) (Rasyad:8). Contohnya adalah pada penelitian mengenai kualitas air terdapat beberapa himpunan *universal* seperti TDS (U_3), pH (U_4), Cl (U_5), CaCO_3 (U_6), KMnO_4 (U_7), SO_4 (U_8), dan sebagainya.

c. Menentukan Himpunan *Fuzzy*

Pengetahuan mengenai himpunan *fuzzy* telah dijelaskan pada pembahasan di subbab sebelumnya. Semua *input* dan *output* dalam sistem tersebut akan dicari himpunan *fuzzynya*. Contohnya adalah Kesadahan (CaCO_3) memiliki 3 himpunan *fuzzy*, yaitu: Rendah, Sedang, Tinggi.

d. Menentukan Aturan *Fuzzy*

Pengetahuan manusia di dalam sistem *fuzzy* dan kontrol direpresentasikan dalam bentuk aturan JIKA-MAKA *fuzzy*. Sebuah aturan JIKA-MAKA *fuzzy* adalah sebuah pernyataan yang direpresentasikan menjadi (Lee, 1990:415):

JIKA x adalah A MAKA y adalah B

dimana x dan y adalah skalar, A dan B adalah himpunan *fuzzy*. Proposisi yang mengikuti Jika disebut sebagai anteseden, sedangkan proposisi yang mengikuti MAKA disebut sebagai konsekuen. Proposisi tersebut dapat diperluas dengan menggunakan operator *fuzzy*, seperti:

JIKA $(x_1 \text{ adalah } A_1) \bullet \dots \bullet (x_n \text{ adalah } A_n)$ MAKA y adalah B

dengan \bullet adalah operator dasar untuk himpunan *fuzzy* (misal: OR atau AND) (Cruz & Figueora, 2010:26).

Misalkan dari 17 parameter yang bertindak sebagai *input* dan variabel kualitas air yang bertindak sebagai *output* dalam penelitian ini akan dibuat menjadi aturan, maka dapat dituliskan:

JIKA Warna adalah “Jernih” AND Kekeruhan adalah “Bening” AND TDS adalah “Rendah” AND pH adalah “Normal” AND Klorida adalah “Rendah” AND CaCO_3 adalah “Rendah” AND KMnO_4 adalah “Rendah” AND Sulfat adalah “Rendah” AND Fluorida adalah “Rendah” AND Nitrit adalah “Rendah” AND Nitrat adalah “Rendah” AND Besi adalah “Rendah” AND Mangan adalah “Rendah” AND

Sianida adalah “Rendah” AND Timbal adalah “Rendah” AND Coliform adalah “Tinggi” dan Coli Tinja adalah “Tinggi” MAKA Kualitas Air adalah “Cemar Berat”.

e. Menentukan Inferensi Fuzzy

Prinsip logika *fuzzy* di dalam inferensi *fuzzy* digunakan untuk mengombinasikan aturan *fuzzy* JIKA-MAKA dalam aturan dasar *fuzzy* ke dalam pemetaan dari himpunan *fuzzy* A' dalam U ke himpunan *fuzzy* B' dalam V (Wang, 1997:94).

Semua aturan dasar *fuzzy* dalam inferensi *fuzzy* dikombinasikan ke dalam hubungan *fuzzy* $(U \times V)$, sehingga terlihat sebagai sebuah aturan *fuzzy* JIKA-MAKA. Terdapat 2 macam operator untuk mengkombinasikan 2 buah *fuzzy*, yaitu: operator *union* (gabungan) dan operator *intersection* (irisan) (Belohlavek & Klir, 2011).

1) Operator Union (gabungan)

Misalkan aturan *fuzzy* JIKA-MAKA dengan bentuk:

$$Ru^{(1)}: \text{JIKA } x_1 \text{ adalah } A_1^l \text{ dan ... dan } x_n \text{ adalah } A_n^l \text{ MAKA } y \text{ adalah } B^l$$

Sebanyak M aturan direpresentasikan sebagai himpunan *fuzzy* Q_M dalam $U \times V$ didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_M = \bigcup_{l=1}^M Ru^{(1)}$$

Kombinasi ini disebut kombinasi Mamdani. Jika digunakan simbol $+$ untuk merepresentasikan *s-norm*, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mu_{Q_M}(x, y) = \mu_{Ru^{(1)}}(x, y) + \dots + \mu_{Ru^{(M)}}(x, y)$$

2) Operator *Intersection* (irisan)

Misalkan aturan *fuzzy* JIKA-MAKA dengan bentuk:

$Ru^{(1)}$: JIKA x_1 adalah A_1^l dan ... dan x_n adalah A_n^l MAKA y adalah B^l

Sebanyak M aturan direpresentasikan sebagai himpunan *fuzzy* Q_G

dalam $U \times V$ didefinisikan sebagai berikut:

$$Q_G = \bigcap_{l=1}^M Ru^{(1)}$$

Kombinasi ini disebut kombinasi Godel. Jika digunakan simbol $*$ untuk merepresentasikan *t-norm*, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mu_{Q_G}(x, y) = \mu_{Ru^{(1)}}(x, y) * \dots * \mu_{Ru^{(M)}}(x, y)$$

Inferensi *fuzzy* yang paling sering digunakan dalam sistem *fuzzy* dan kontrol *fuzzy* adalah (Wang, 1997: 97):

1) Inferensi *Product*

Ada beberapa syarat yang digunakan dalam inferensi *product*, yaitu sebagai berikut:

- (i) Aturan individual berdasarkan inferensi dengan kombinasi gabungan:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_1}(y) + \dots + \mu_{B'_M}(y)$$

- (ii) Implikasi *product* Mamdani:

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{FP_1}(x) \mu_{FP_2}(y)$$

(iii) *Product* untuk semua operator *t-norm* dan *max* untuk semua operator *s-norm*.

Sehingga diperoleh sistem inferensi *product* sebagai berikut:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A'_i}(x_i) \mu_{B'}(y))]]$$

2) Inferensi *Minimum*

Ada beberapa syarat yang digunakan dalam inferensi *minimum*, yaitu sebagai berikut:

(i) Aturan individual berdasarkan inferensi dengan kombinasi gabungan:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_{1'}}(y) + \dots + \mu_{B'_{M'}}(y)$$

(ii) Implikasi *minimum* Mamdani:

$$\mu_{Q_{MM}}(x, y) = \min (\mu_{FP_1}(x), \mu_{FP_2}(y))$$

(iii) *Min* untuk semua operator *t-norm* dan *max* untuk semua operator *s-norm*.

Sehingga diperoleh sistem inferensi *minimum* sebagai berikut:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\text{supmin}(\mu_{A'}(x), \mu_{A'_1}(x_1), \dots, \mu_{A'_n}(x_n), \mu_{B'}(y)))]$$

f. Melakukan Defuzzifikasi

Defuzzifikasi didefinisikan sebagai sebuah pemetaan dari himpunan *fuzzy* B' dalam $V \subset \mathbb{R}$ (dimana merupakan output dari sistem inferensi *fuzzy*) ke titik tegas $y^* \in V_1$. Ada 3 kriteria yang harus

dipertimbangkan dalam memilih skema defuzzifikasi, yaitu (Wang, 1997:108):

- *Plausibility* yaitu titik y^* seharusnya merepresentasikan B' dari sebuah titik berdasarkan intuisi.
- *Computational simplicity* yaitu kriteria ini sangat penting sekali untuk kontrol *fuzzy* karena operasi pengontrol *fuzzy* dalam kasus nyata.
- *Continuity* yaitu sebuah perubahan kecil dalam B' yang tidak seharusnya mengalami perubahan besar dalam y^* .

Input dari proses defuzzifikasi adalah suatu himpunan *fuzzy* yang diperoleh dari komposisi aturan-aturan *fuzzy*, sedangkan *output* yang dihasilkan merupakan suatu bilangan pada domain himpunan *fuzzy* tersebut. Sehingga jika diberikan suatu himpunan *fuzzy* dalam range tertentu, maka harus dapat diambil suatu nilai tegas tertentu sebagai *output*.

Terdapat beberapa metode yang bisa digunakan untuk proses defuzzifikasi, diantaranya adalah:

1) *Center Of Gravity*

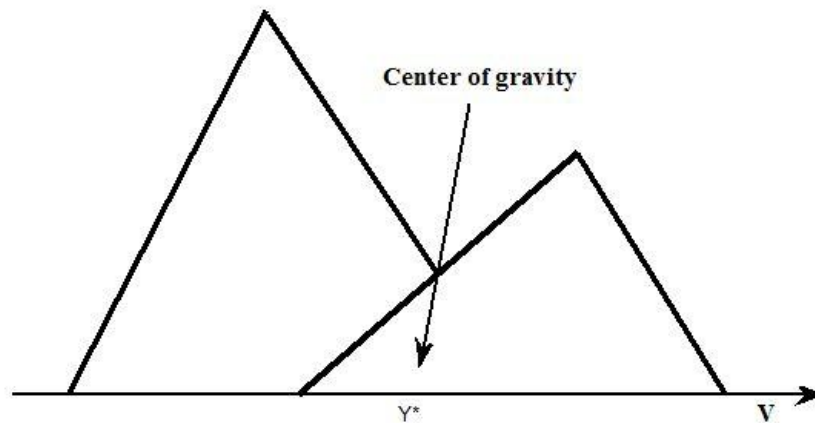
Metode defuzzifikasi *Center Of Gravity* menetapkan y^* sebagai pusat dari daerah yang ditutupi oleh fungsi keanggotaan dari B' .

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy}$$

Keterangan : y : nilai domain

$\mu_{B'}(y)$: nilai derajat keanggotaan y di B'

dimana \int_v adalah integral konvensional. Gambar 2.13 di bawah ini menunjukkan operasi tersebut dengan grafik.



Gambar 2.13 Representasi grafik dari defuzzifikasi metode *Center Of Gravity* (Wang, 1997:109)

Keuntungan dari defuzzifikasi metode *Center Of Gravity* adalah dapat dihitung atau diproses berdasarkan prediksi yang masuk akal. Sedangkan kelemahan dari metode tersebut adalah harus dijalankan atau diproses dengan menggunakan perhitungan yang intensif. Pada kenyataannya, fungsi keanggotaan $\mu_{B'}(y)$ biasanya tidak teratur dan proses pengintegralan pada metode tersebut sulit untuk dilakukan perhitungan (Wang, 1997: 109).

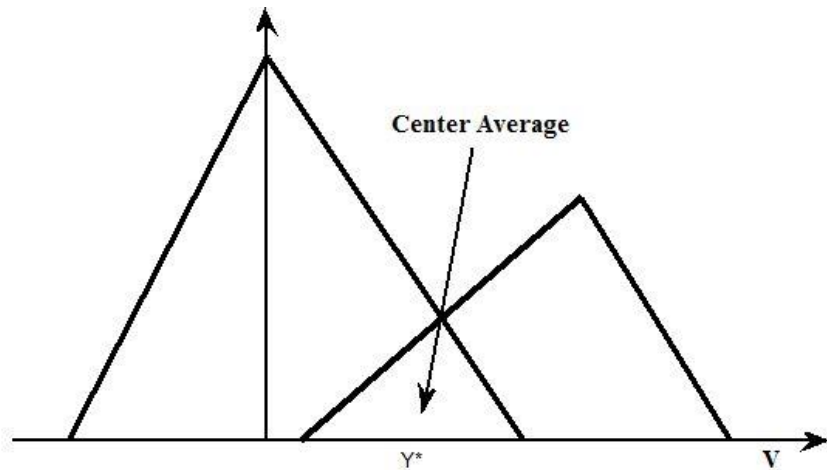
2) *Center Average*

Defuzzifikasi metode *center average* adalah metode defuzzifikasi yang paling banyak digunakan dalam sistem *fuzzy*

dan kontrol *fuzzy*. Metode ini menggunakan perhitungan yang lebih sederhana dan masuk akal apabila dibandingkan dengan metode *Center Of Gravity*. Misalkan \bar{y}^l adalah pusat dari himpunan *fuzzy* ke- l dan w_l adalah tingginya, maka defuzzifikasi *center average* menyimpulkan y^* sebagai berikut (Wang, 1997: 110).

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l . w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

Gambar 2.14 di bawah ini menunjukkan ilustrasi dari operasi tersebut secara grafik untuk contoh sederhana dengan $M = 2$.



Gambar 2.14 Representasi grafik dari defuzzifikasi metode *center average* (Wang, 1997: 110).

Lemma 2.1. Misalkan bahwa himpunan *fuzzy* B^l dalam aturan JIKA-MAKA adalah normal dengan \bar{y}^l . Maka dari sistem *fuzzy* dengan aturan dasar *fuzzy*, sistem inferensi *product*, fuzzifikasi

singleton, dan defuzzifikasi *center average* akan diperoleh (Wang, 1997: 118):

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))}{\sum_{l=1}^M (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))} \quad (2.1)$$

dimana $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ adalah *input* untuk sistem *fuzzy*, dan $f(x) \in V \subset \mathbb{R}$ adalah *output* dari sistem *fuzzy*.

Berdasarkan Lemma 2.1 tersebut dapat diketahui bahwa untuk memperoleh rumus (2.1) tersebut diperlukan beberapa syarat yang harus dipenuhi, yaitu:

- a. Himpunan *fuzzy* B^l dalam aturan JIKA-MAKA adalah normal dengan pusat \bar{y}^l :

JIKA x_1 *adalah* A_1^l *dan ... dan* x_n *adalah* A_n^l *MAKA* y *adalah* B^l adalah normal dengan pusat \bar{y}^l .

- b. Menggunakan aturan dasar *fuzzy*

JIKA x_1 *adalah* A_1^l *dan ... dan* x_n *adalah* A_n^l *MAKA* y *adalah* B^l

- c. Menggunakan sistem inferensi *product*:

Dalam sistem inferensi *product*, digunakan:

- (i) Aturan individual berdasarkan inferensi dengan kombinasi gabungan:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_{1'}}(y) + \dots + \mu_{B'_{M'}}(y)$$

- (ii) Implikasi *product* Mamdani:

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{FP_1}(x) \mu_{FP_2}(y)$$

(iii) *Product* untuk semua operator *t-norm* dan *max* untuk semua operator *s-norm*.

Sehingga diperoleh sistem inferensi *product* sebagai berikut:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y))]]$$

d. Menggunakan fuzzifikasi *singleton*:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x = x^* \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

e. Menggunakan defuzzifikasi *center average*:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \cdot w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

Apabila semua syarat tersebut dipenuhi, maka akan diperoleh bentuk rumus (2.1) dimana $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ adalah *input* untuk sistem *fuzzy*, dan $f(x) \in U \subset \mathbb{R}$ adalah *output* dari sistem *fuzzy*.

3) **Maximum**

Defuzzifikasi metode *maximum* memilih y^* sebagai titik di V dimana $\mu_{B'}(y)$ mencapai nilai maksimumnya. Hal tersebut didefinisikan sebagai berikut (Wang, 1997:112).

$$hgt(B') = \{y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y)\}$$

$hgt(B')$ adalah himpunan dari semua titik di V dimana $\mu_{B'}(y)$ mencapai nilai maksimumnya. Defuzzifikasi *maximum* mendefinisikan y^* sebagai sebuah elemen acak dalam $hgt(B')$.

$$y^* = \text{suatu titik di } hgt(B')$$

Jika $hgt(B')$ terdiri dari sebuah titik tunggal, maka y^* didefinisikan secara khusus. Jika $hgt(B')$ terdiri dari lebih dari 1 titik, maka dapat menggunakan *smallest of maxima*, *largest of maxima*, atau *mean of maxima*.

Pertama adalah metode defuzzifikasi *smallest of maxima*. Pada metode ini solusi tegas diperoleh dengan cara mengambil nilai terkecil dari domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum (Kusumadewi, 2003: 190). Metode tersebut didefinisikan sebagai berikut (Wang, 1997: 112).

$$y^* = \inf\{y \in hgt(B')\}$$

Kedua adalah metode *largest of maxima*. Pada metode ini, solusi tegas diperoleh dengan cara mengambil nilai terbesar dari domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum (Kusumadewi, 2003: 190). Metode tersebut didefinisikan sebagai berikut (Wang, 1997: 112).

$$y^* = \sup\{y \in hgt(B')\}$$

Ketiga adalah metode *mean of maxima*. Pada metode ini, solusi tegas diperoleh dengan cara mengambil nilai rata-rata domain yang memiliki nilai keanggotaan maksimum (Kusumadewi, 2003: 190). Metode tersebut didefinisikan sebagai berikut (Wang, 1997:112)

$$y^* = \frac{\int_{\text{hgt}(B)} y dy}{\int_{\text{hgt}(B')} dy}$$

Lemma 2.2. Misalkan bahwa himpunan *fuzzy* B^l dalam aturan JIKA-MAKA adalah normal dengan pusat \bar{y}^l . Maka dari sistem *fuzzy* dengan aturan dasar *fuzzy*, sistem inferensi *product*, fuzzifikasi *singleton*, dan defuzzifikasi *maximum* akan diperoleh (Wang, 1997: 122):

$$f(x) = \bar{y}^{l^*} \quad (2.2)$$

dimana $l^* \in \{1, 2, \dots, M\}$ sedemikian sehingga

$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l^*}}(x_i) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i)$$

Untuk semua $l \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Berdasarkan Lemma 2.2 tersebut dapat diketahui bahwa untuk memperoleh rumus (2.2) tersebut diperlukan beberapa syarat yang harus dipenuhi, yaitu:

- a. Himpunan *fuzzy* B^l dalam aturan JIKA-MAKA adalah normal dengan pusat \bar{y}^l :

JIKA x_1 adalah A_1^l dan ... dan x_n adalah A_n^l MAKA y adalah B^l adalah normal dengan pusat \bar{y}^l .

- b. Menggunakan aturan dasar *fuzzy*:

JIKA x_1 adalah A_1^l dan ... dan x_n adalah A_n^l MAKA y adalah B^l

- c. Menggunakan sistem inferensi *product*:

Dalam sistem inferensi *product*, digunakan:

- (i) Aturan individual berdasarkan inferensi dengan kombinasi gabungan:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{B'_{1}}(y) + \dots + \mu_{B'_{M}}(y)$$

- (ii) Implikasi *product* Mamdani:

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{FP_1}(x) \mu_{FP_2}(y)$$

- (iii) *Product* untuk semua operator *t-norm* dan *max* untuk semua operator *s-norm*.

Sehingga diperoleh sistem inferensi *product* sebagai berikut:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A'_i}(x_i) \mu_{B'}(y))]$$

- d. Menggunakan fuzzifikasi *singleton*:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x = x^* \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

- e. Menggunakan Defuzzifikasi *maximum*:

$$y^* = \text{suatu titik di } hgt(B')$$

Apabila semua syarat dipenuhi, maka akan diperoleh bentuk rumus (2.2) dimana $l^* \in \{1, 2, \dots, M\}$ sedemikian hingga

$$\prod_{i=1}^n \mu_{A'_i}(x_i) \geq \prod_{i=1}^n \mu_{A'_i}(x_i)$$

Untuk semua $l \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Pada penelitian ini akan menggunakan metode *Center of Gravity* untuk proses defuzzifikasi. Keuntungan dari defuzzifikasi metode *Center Of Gravity* adalah dapat dihitung atau diproses dengan

sederhana berdasarkan perkiraan yang masuk akal dan kontinyu (Wang, 1997:109).

G. Pengujian Sistem *Fuzzy*

Pengujian dilakukan untuk menguji apakah analisis yang dilakukan sudah sesuai atau belum. Pengujian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan menghitung keakurasian sistem yaitu dengan menghitung hasil jumlah data yang sesuai dengan kenyataan dibagi dengan jumlah seluruh data. Secara matematis dapat dinyatakan dengan formula (Nithya dan Santhi, 2011):

$$Akurasi = \frac{Jumlah\ data\ benar}{Jumlah\ data\ total} \times 100\%$$

Kesalahan atau *error* merupakan kesalahan pada sistem berdasarkan data masukan. Besar kesalahan dapat diketahui dengan cara:

$$Error = 100\% - Akurasi$$

Sistem *fuzzy* dengan tingkat keakurasian yang tinggi dianggap mampu mewakili analisis kualitas suatu permasalahan. Dalam hal ini, sistem *fuzzy* tersebut digunakan untuk analisis kualitas air sumur di Daerah Istimewa Yogyakarta.